

## VEKTORSKI AUTOREGRESIIONI MODELI VAR MODELI

Zorica Mladenović

### Tema:

1. Uslov stabilnosti VAR modela
2. Ocene parametara modela
3. Određivanje reda VAR modela
4. Uzročnost
5. Funkcija impulsnog odziva
6. Dekompozicija varijanse greške predviđanja
7. Strukturni VAR model

## Uzročnost: Grejndžerova uzročnost

**Granger** (1969) : “Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods”, *Econometrica*, 37

*Definicija Grejndžerove uzročnosti za  $X_t$  i  $Y_t$*

$Y_t$  ne uzrokuje  $X_t$  u smislu Grejndžera ako za svako  $s$  veće od nula, srednja kvadratna greska predvidjanja za  $X_{t+s}$  obrazovana na osnovu  $(X_t, X_{t-1}, \dots)$  je jednaka srednje kvadratnoj greski predvidjanja za  $X_{t+s}$  koja se formira na osnovu  $(X_t, X_{t-1}, \dots)$  i  $(Y_t, Y_{t-1}, \dots)$ .

## Uzročnost: Grejndžerova uzročnost II

### Srednja kvadratna greška predvidjanja: SKG

Predvidjanje I za  $X_{t+s}$  obrazovanosamo na osnovu  $(X_t, X_{t-1}, \dots)$ :

$$\hat{X}_{t+s}^{(1)} = E(X_{t+s} | X_t, X_{t-1}, \dots),$$

$$SKG(\hat{X}_{t+s}^{(1)}) = E(X_{t+s} - \hat{X}_{t+s}^{(1)})^2$$

Predvidjanje II za  $X_{t+s}$  obrazovanona osnovu  $(X_t, X_{t-1}, \dots)$  i  $(Y_t, Y_{t-1}, \dots)$ :

$$\hat{X}_{t+s}^{(2)} = E(X_{t+s} | X_t, X_{t-1}, \dots, Y_t, Y_{t-1}, \dots),$$

$$SKG(\hat{X}_{t+s}^{(2)}) = E(X_{t+s} - \hat{X}_{t+s}^{(2)})^2$$

$$\text{Ako: } SKG(\hat{X}_{t+s}^{(1)}) = SKG(\hat{X}_{t+s}^{(2)})$$

tada  $Y_t$  ne uzrokuje  $X_t$  u smislu Grejndžera

### Uzročnost: Grejndžerova uzročnost III

Alternativne interpretacije:

- $X_t$  nije endogena vremenska serija u odnosu na  $Y_t$
- $Y_t$  nije informativan u linearном smislu u pogledu budućeg kretanja  $X_t$
- U ovom slučaju relevantan je VAR model oblika:

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(1)} & 0 \\ \phi_{21}^{(1)} & \phi_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(2)} & 0 \\ \phi_{21}^{(2)} & \phi_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-2} \\ Y_{t-2} \end{bmatrix} + \dots \\ + \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(p)} & 0 \\ \phi_{21}^{(p)} & \phi_{22}^{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-p} \\ Y_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

### Testiranje Grejndžerove uzročnosti Da li $Y$ uzrokuje $X$ ?

1. Postavljamo VAR model za  $X_t$  i  $Y_t$
2. Fokusiramo se na jednačinu za  $X_t$ :

$$X_t = c_1 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \dots \\ + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \dots + \beta_p Y_{t-p} + sl. greska$$

3. Posmatramo sledeće hipoteze

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0 \quad (Y_t \text{ ne uzrokuje } X_t)$$

$$H_1 : \text{Bar jedno } \beta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, p$$

4. Ocenjujemo VAR model za  $X$  dva puta ( $T+p$  podataka):

1. Bez ograničenja (polazni VAR)

→ rezidualna suma kvadrata, RSKB

2. Sa ograničenjem nulte hipoteze

( $X$  samo od sopstvenih docnji)

→ rezidualna suma kvadrata, RSKO

### Testiranje Grejndžerove uzročnosti II

5. Testiramo valjanost nulte hipoteze na osnovu F statistike oblika:

$$F = \frac{(RSKO - RSKB) / (\text{broj ogranicenja})}{RSKB / (\text{broj stepeni slobode u polaznom modelu})},$$

$$F = \frac{(RSKO - RSKB) / p}{RSKB / (T - 2p - 1)},$$

Asimptotski ova raspodela je ekvivalentna

$\chi^2$  raspodeli sa  $p$  stepeni slobode :

$$\chi_p^2 = \frac{T(RSKO - RSKB)}{RSKB}$$

### Primer upotrebljivosti testa uzročnosti

Posebna prezentacija rada:

Mladenović (2009), Relationship between inflation and inflation uncertainty, *YUJOR, 19, No1.*

**Tema:**

1. Uslov stabilnosti VAR modela
2. Ocene parametara modela
3. Određivanje reda VAR modela
4. Uzročnost
- 5. Funkcija impulsnog odziva**
6. Dekompozicija varijanse greške predviđanja
7. Strukturni VAR model

**Funkcija impulsnog odziva**

**Cilj:** analiza reakcije sistema na dejstvo neočekivanog slučajnog uticaja (impulta)

$$Y_t = c + \Phi_1 Y_{t-1} + a_t$$

Sistem je stabilan :

$$Y_t = \mu + a_t + \underbrace{\Psi_1 a_{t-1}}_{\Phi_1} + \underbrace{\Psi_2 a_{t-2}}_{\Phi_2} + \dots = \mu + \Psi(L) a_t$$

$$\Psi(L) = [I_n + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \dots]$$

Zapisujemo sistem u trenutku  $t+s$  :

$$Y_{t+s} = \mu + a_{t+s} + \Psi_1 a_{t+s-1} + \Psi_2 a_{t+s-2} + \dots + \Psi_s a_t + \Psi_{s+1} a_{t-1} + \dots$$

Interpretacija matrice  $\Psi_s$

$$\frac{\partial Y_{t+s}}{\partial a'_t} = \Psi_s = [\psi_{ij}^{(s)}]_{n \times n}$$

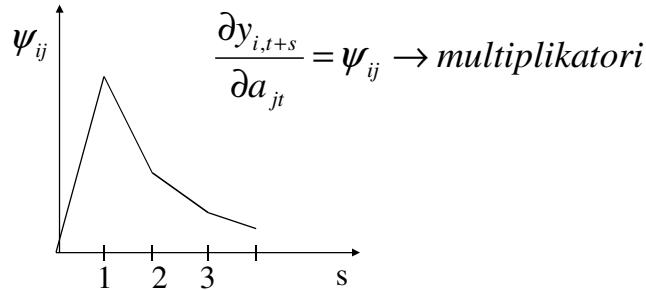
$$\frac{\partial y_{i,t+s}}{\partial a_{jt}} = \psi_{ij}^{(s)}$$

Reakcija promenljive  $y_i$  u trenutku  $t+s$  na jedinični impuls  $j$  u trenutku  $t$  uz fiksirano dejstvo svih faktora u trenutku  $t$  i ranije

## Funkcija impulsnog odziva II

Funkcija impulsnog odziva:

Grafički prikaz reakcije  $y_{i,t+s}$  za  $s=1,2,\dots$  na jednokratni impuls u trenutku  $t$  na  $y_{jt}$  pod pretpostavkom da nema impulsa na druge promenljive sistema u trenucima  $t,t-1,\dots$



## Primer: FIO za VAR(1) dimenzije 2

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}; \quad \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$t$  manje od 0,  $y_{1t} = y_{2t} = 0$

$t = 0, a_{10} = 0, a_{20} = 1$  ( $y_{2t}$  se povecava za jednu jedinicu)

drugih impulsa nema

**Reakcija sistema**

$$\begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{impuls})$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

⋮

$$\begin{bmatrix} y_{1s} \\ y_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}^s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \Phi_1^s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pogledajmo MA reprezentaciju:

$$\Psi(L) = [\Phi(L)]^{-1}$$

$$\Psi_1 = \Phi_1, \Psi_2 = \Phi_1^2, \dots, \Psi_s = \Phi_1^s$$

U ovom primeru kovarijaciona matrica nije dijagonalna:

$$\sigma_{12} \neq 0$$

Postoji tekuća korelacija između impulsa (šokova) :

$$\begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Ovo je nerealna pretpostavka}$$

Da bi se prevazišao problem kovarijaciona matrica mora da se transformiše tako da postane dijagonalna.

Ovom transformacijom impulsi postaju nezavisni-ortogonalni.

### Ortogonalna funkcija impulsnog odziva

$Q$  je realna pozitivno definitna matrica (simetricna)

Postoji nesingularna matrica  $Q, n \times n$ , tako da vazi:  $Q \Omega Q' = I_n$

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\Psi_i Q^{-1}}_{M_i} \underbrace{Q a_{t-i}}_{w_{t-i}}$$

$$M_i = \Psi_i Q^{-1}, w_i = Q a_i \Rightarrow Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} M_i w_{t-i}$$

$$E(w_t w_t') = E(Q a_t a_t' Q') = \underbrace{Q E(a_t a_t')}_{\Omega} Q' = I_n$$

$w_t$  – nove slučajne greske su nekorelisane i svaka ima varijansu 1.

$$\frac{\partial Y_{t+s}}{\partial w_t} = M_s = \Psi_s Q^{-1} \longrightarrow \text{Ortogonalna funkcija impulsnog odziva.}$$

**Problem:**  $Q$  nije jedinstvena matrica

## Ortogonalna funkcija impulsnog odziva II Holeskijeva dekompozicija

Buduci da je  $\Omega$  simetricna i pozitivno definitna matrica,  
ona se uvek moze predstaviti u formi :

$$\Omega = VDV',$$

$V$  - jedinstvena donja trougaona matrica sa jedinicama na glavnoj dijagonalni,  $n \times n$

$D$  – jedinstvena dijagonalna matrica sa pozitivnim vrednostima,  $n \times n$

$$w_t = V^{-1}a_t \Rightarrow E(w_t w_t') = V^{-1}E(a_t a_t') V^{-1} = V^{-1}\Omega(V^{-1}) = V^{-1}VDV' (V^{-1}) = D$$

$D$  je kovariaciona matrica od  $w_t \Rightarrow$

Elementi slucajnih clanova  $w_t$  su nekorelirani sa varijansama na glavnoj dijagonalni  $D$

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_{w1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{w2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{w3}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dalje : } Vw_t = a_t; \text{ Primer za } n=3 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_{21} & 1 & 0 \\ v_{31} & v_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \\ w_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ a_{3t} \end{bmatrix}$$

## Ortogonalna funkcija impulsnog odziva III Holeskijeva dekompozicija

$D$  dijagonalna matrica ciji su elementi varijanse svakog od clanova  $w_t, n \times n$ .

$D^{1/2}$  dijagonalna matrica ciji su elementi standardne devijacije  $w_t, n \times n$  :

$$\Omega = VDV' = VD^{1/2}D^{1/2}V' = PP'$$

$$P = VD^{1/2}, P^{-1} = D^{-1/2}V^{-1}$$

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i P P^{-1} a_{t-i}, M_i = \Psi_i P$$

$$v_t = P^{-1}a_t = D^{-1/2}V^{-1}a_t = D^{-1/2}w_t, E(v_t v_t') = I_n$$

$$\Rightarrow Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} M_i v_{t-i}, v_t = D^{-1/2}w_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Y_{t+s}}{\partial v_t'} = M_s = \Psi_s P \rightarrow$$

→ Jedinica mere reakcija sistema :

standardna devijacija ortogonalnog impulsa  $w_t$ .

### Ortogonalna funkcija impulsnog odziva IV Holeskijeva dekompozicija

Primer  $n = 3$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_{21} & 1 & 0 \\ v_{31} & v_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \\ w_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ a_{3t} \end{bmatrix}, D^{1/2} v_t = w_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{w1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{w2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{w3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \\ w_{3t} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$1. v_t = \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{w1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{w2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_{w3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \\ w_{3t} \end{bmatrix}$$

$$2. v_t = \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_{21} & 1 & 0 \\ v_{31} & v_{32} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/\sigma_{w1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{w2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_{w3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ a_{3t} \end{bmatrix}$$

### Ortogonalna funkcija impulsnog odziva V Holeskijeva dekompozicija

Dva svojstva clanova nove slucajne greske  $v_t$ .

1. Dobijaju se deljenjem starih sa korespondirajucom standardnom devijacijom. Promeni impulsa  $v_{it}$  od jedne jedinice odgovara promena impulsa od jedne standardne devijacije u  $w_{it}$ .
2. Ovo je trougaona dekompozicija kojom se namece rekurzivna struktura reakcije polaznog sistema.
3. Kako se odreduje redosled promenljivih u sistemu?  
Na osnovu rezultata testa uzrocnosti.

### Ortogonalna funkcija impulsnog odziva VI Holeskijeva dekompozicija

$$\begin{aligned} v_t &= \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_{21} & 1 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1t}/\sigma_{w1} \\ a_{2t}/\sigma_{w2} \\ a_{3t}/\sigma_{w3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_{21} & 1 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ a_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{w1}v_{1t} \\ \sigma_{w2}v_{2t} \\ \sigma_{w3}v_{3t} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_{1t} = \sigma_{w1}v_{1t} \\ a_{2t} = -d_{21}a_{1t} + \sigma_{w2}v_{2t} \\ a_{3t} = -d_{31}a_{1t} - d_{32}a_{2t} + \sigma_{w3}v_{3t} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Promenljiva u jednacini I ne zavisi od tekucih uticaja ostalih promenljivih
  2. Promenljiva u jednacini II zavisi od tekuceg uticaja promenljive u jednacini I
  3. Promenljiva u jednacini III zavisi od tekuceg uticaja promenljivih u I i II jednacini
- OVO JE REDOSLED 1-2-3

### Ocena funkcije impulsnog odziva i formiranje odgovarajućih intervala poverenja

- Ova funkcija se konstruiše na osnovu ocenjenih koeficijenata VAR modela: *u asimptotskim uslovima ocene su normalno raspodeljene.*
- Imajući u vidu veliki broj parametara za ocenjivanje, moguće je da su ocene međusobno korelisane, što ocene funkcije impulsnog odziva može činiti nepreciznim.
- Kako formirati odgovarajuće intervale poverenja?
  - Na osnovu normalne raspodele
  - Na osnovu metoda simulacije

### Primena metoda simulacija (Monte-Karlo)

1. Ocjenjuje se VAR model i dobijaju se:

$\hat{a}_{1t}$  – reziduali iz prve jednacine,  $\hat{a}_{2t}$  – reziduali iz druge jednacine, itd.  
 $\hat{\phi}_{11}, \hat{\phi}_{12},$  itd., - odgovarajuce ocene parametara.

2. Za uzorak obima  $T$  izvlači se  $T$  slučajnih brojeva koji treba da predstavljaju seriju reziduala. Najveći broj statističkih paketa će generisati slučajne brojeve tako što će na slučaj uzimati neke od vrednosti reziduala. Na ovaj način dobijamo simulirane serije koje bi trebalo da imaju ista svojstva kao i stvarne slučajne greške.

2a. Kako su slučajne greške VAR modela međusobno korelisane na docnji 0, prilikom generisanja slučajnih greški treba voditi računa da se održi prvo bitno utvrđena korelaciona struktura.

3. Prema simuliranoj seriji slučajne greške simuliraju se podaci iz uzorka uz prethodno definisane inicijalne vrednosti i koristeći već ocenjene vrednosti parametara.

### Primena metoda simulacija (Monte-Karlo) II

4. Prema rekonstruisanoj seriji podataka ocjenjuje se VAR model ponovo i potom i funkcija impulsnog odziva.
5. Ovaj postupak ocenjivanja ponavlja se mnogo puta. Na primer, na osnovu 10000 izračunatih funkcija impulsnog odziva obrazuje se interval poverenja sa verovatnoćom 95% , tako što se iz datog skupa izostavlja 2.5% najmanjih i 2.5% najvećih vrednosti.
6. Prednost ovakvog računanja: raspodela ocena parametara nije od značaja.

### Primer primene funkcije impulsnog odziva

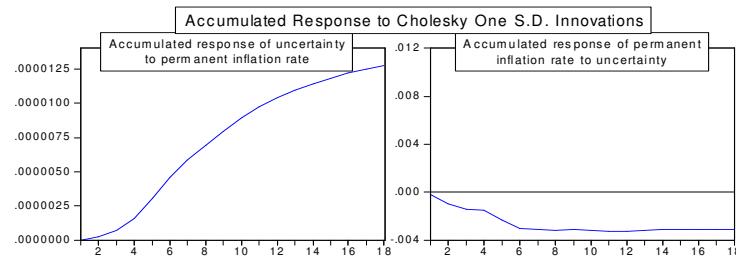
Mladenović (2009), Relationship between inflation and inflation uncertainty, *YUJOR*, 19, No1.

Mladenović and Petrović (2012)

Currency crash and exchange rate pass-through:  
A tale of two crises in Serbia

### Empirical results for Serbia: Modelling permanent inflation III

- Accumulated impulse response function is calculated from VAR to evaluate reaction of:
  - Uncertainty to positive unanticipated random shock in permanent inflation
  - Permanent inflation to positive unanticipated random shock in uncertainty
  - Two possible Cholesky decompositions of residual covariance matrix are used giving similar results



Mladenović i Petrović (2012):

- Ocenjen je VAR model četiri vremenske serije: cene (p), devizni kurs (epe), plate (w) i cena nafte (poil)
- Ocena dinamičkog efekta transmisije kursa na cene  
***Količnik vrednosti multiplikatora iz funkcije impulsnog odziva jednačine cena i jednačine kursa kao reakcija na šok u jednačini kursa ( $pt+j/et+j$ )***
- Rezultat: efekat transmisije kursa na cene je relativno mali i nekompletan.

Jul 2001 – Jul 2008	3 meseca	6 meseci	9 meseci	12 meseci	18 meseci	24 meseca	36 meseci
<i>poil-w-epe-p</i>	0.21	0.26	0.30	0.33	0.38	0.41	0.47
<i>poil- w-p-epe</i>	0.15	0.20	0.25	0.28	0.34	0.38	0.44

**Tema:**

1. Uslov stabilnosti VAR modela
2. Ocene parametara modela
3. Određivanje reda VAR modela
4. Uzročnost
5. Funkcija impulsnog odziva
6. Dekompozicija varijanse greške predviđanja
7. Strukturni VAR model

## Dekompozicija varijanse (greške predviđanja)

### Najava:

- VAR modelom se ne opisuju tekući uticaji promenljivih.
- Ukoliko postoje, ovi uticaji su sadržani u rezidualima i zbirno su predstavljeni kovarijacionom matricom reziduala.
- Na osnovu ove matrice i vektorske forme pokretnih sredina može se zaključiti koliko u ukupnom varijabilitetu neočekivane promene jedne promenljive učestvuje varijabilitet ostalih.
- Može se pratiti i promena njihovog relativnog udela tokom vremena.

## Dekompozicija varijanse (greške predviđanja)

**Cilj:** utvrđivanje doprinosu varijabiliteta datog ortogonalnog impulsa na srednju kvadratnu grešku predviđanja s-perioda unapred svih promenljivih

Stvarna vrednost vektora  $Y_t$  u trenutku  $t+s$ :

$$Y_{t+s} = a_{t+s} + \Psi_1 a_{t+s-1} + \dots + \Psi_{s-1} a_{t+1} + \Psi_s a_t + \Psi_{s+1} a_{t-1} + \dots$$

Prognozirana vrednost  $\hat{Y}_t$  u trenutku za  $s$  perioda unapred (najbolja prognoza):

$$Y_{t+s|t} = \hat{Y}_t(s) = \Psi_s a_t + \Psi_{s+1} a_{t-1} + \dots$$

Greskaove prognoze:

$$Y_{t+s} - \hat{Y}_t(s) = a_{t+s} + \Psi_1 a_{t+s-1} + \dots + \Psi_{s-1} a_{t+1}$$

Srednja kvadratna greska, SKG, ove prognoze:

$$\begin{aligned} \text{SKG}(\hat{Y}_t(s)) &= E(Y_{t+s} - \hat{Y}_t(s))(Y_{t+s} - \hat{Y}_t(s))' \\ &= E(a_{t+s} + \Psi_1 a_{t+s-1} + \dots + \Psi_{s-1} a_{t+1})(a_{t+s} + \Psi_1 a_{t+s-1} + \dots + \Psi_{s-1} a_{t+1})' \\ &= \Omega + \Psi_1 \Omega \Psi_1' + \Psi_2 \Omega \Psi_2' + \dots + \Psi_{s-1} \Omega \Psi_{s-1}' \end{aligned}$$

$$E(a_t a_t') = \Omega$$

Prelazimona ortogonalne impulse:

$$\begin{aligned} \text{SKG}(\hat{Y}_t(s)) &= Q^{-1} \Omega Q Q' Q^{-T} + \Psi_1 Q^{-1} \Omega Q Q' Q^{-T} \Psi_1' \\ &\quad + \Psi_2 Q^{-1} \Omega Q Q' Q^{-T} \Psi_2' + \dots + \Psi_{s-1} Q^{-1} \Omega Q Q' Q^{-T} \Psi_{s-1}' \end{aligned}$$

## Dekompozicija varijanse (greške predviđanja) II

Nastavak, ortogonalni impulsi :

$$\text{SKG}(\hat{Y}_t(s)) = Q^{-l} Q \Omega Q' Q^{-l'} + \Psi_l Q^{-l} Q \Omega Q' Q^{-l'} \Psi_l' \\ + \Psi_2 Q^{-l} Q \Omega Q' Q^{-l'} \Psi_2' + \dots + \Psi_{s-l} Q^{-l} Q \Omega Q' Q^{-l'} \Psi_{s-l}'$$

Podsecanje :

$$M_i = \Psi_i Q^{-l}, M_0 = \Psi_0 Q^{-l}, \Psi_0 = I_n$$

$$\text{SKG}(\hat{Y}_t(s)) = Q^{-l} Q^{-l'} + \Psi_l Q^{-l} Q^{-l'} \Psi_l' + \Psi_2 Q^{-l} Q^{-l'} \Psi_2' + \dots + \Psi_{s-l} Q^{-l} Q^{-l'} \Psi_{s-l}' \\ = \underbrace{M_0 M_0'}_s + \underbrace{M_1 M_1'}_{s-1} + \underbrace{M_2 M_2'}_{s-2} + \dots + \underbrace{M_{s-l} M_{s-l}'}_l$$

$$s \rightarrow \infty, \text{SKG}(\hat{Y}_t(s)) \rightarrow \text{var}(Y_t).$$

$M_0 M_0'$  - doprinos ortogonalnih sokova ukupnom varijabilitetu sistema u trenutku  $t+s$

$M_{s-l} M_{s-l}'$  - doprinos ortogonalnih sokova ukupnom varijabilitetu sistema u trentuku  $t+l$

Ovaj varijabilitet moze se razloziti na varijabilitet pojedinih elemenata u sistemu.

## Dekompozicija varijanse (greške predviđanja) III

Greskaprognose:

$$Y_{t+s} - \hat{Y}_t(s) = a_{t+s} + \Psi_l a_{t+s-l} + \dots + \Psi_{s-l} a_{t+1}$$

Neka su date ortogonalne slucajnegreske  $w_t = V^{-l} a_t$ .

Greskaprognozemoze da se izrazii preko ovih ortogonalnih impulsata:

$$Y_{t+s} - \hat{Y}_t(s) = \underbrace{\Theta_0 w_{t+s}}_{\Theta_l} + \underbrace{\Psi_l V w_{t+s-l}}_{\Theta_l} + \dots + \underbrace{\Psi_{s-l} V w_{t+1}}_{\Theta_{s-l}}$$

$$Y_{t+s} - \hat{Y}_t(s) = \Theta_0 w_{t+s} + \Theta_l w_{t+s-l} + \dots + \Theta_{s-l} w_{t+1}$$

Za VAR dimenzije 2 mozemo pisati:

$$\begin{bmatrix} y_{1t+s} - \hat{y}_{1t}(s) \\ y_{2t+s} - \hat{y}_{2t}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(0)} & \theta_{12}^{(0)} \\ \theta_{21}^{(0)} & \theta_{22}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1t+s} \\ w_{2t+s} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \theta_{11}^{(s-l)} & \theta_{12}^{(s-l)} \\ \theta_{21}^{(s-l)} & \theta_{22}^{(s-l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1t+1} \\ w_{2t+1} \end{bmatrix}$$

Vektor  $w_t$  se sastoji od nekorelisanih komponenti

## Dekompozicija varijanse (greške predviđanja) IV

Izdvajamo prvu jednacinu :

$$y_{1t+s} - \hat{y}_{1t}(s) = \theta_{11}^{(0)} w_{1t+s} + \dots + \theta_{11}^{(s-1)} w_{1t+1} \\ + \theta_{12}^{(0)} w_{2t+s} + \dots + \theta_{12}^{(s-1)} w_{2t+1}$$

Varijansa greske predvidjanja prve komponente s perioda unapred :

$$\text{var}(y_{1t+s} - \hat{y}_{1t}(s)) = \text{SKG}(\hat{y}_{1t}(s)) \\ = \sigma_{w1}^2 \left( \theta_{11}^{(0)2} + \dots + \theta_{11}^{(s-1)2} \right) + \sigma_{w2}^2 \left( \theta_{12}^{(0)2} + \dots + \theta_{12}^{(s-1)2} \right)$$

Deo varijanse greske predvidjanja,  $\text{SKG}(\hat{y}_{1t}(s))$ , koji se javlja zbog šoka  $w_1$  :

$$\frac{\sigma_{w1}^2 \left( \theta_{11}^{(0)2} + \dots + \theta_{11}^{(s-1)2} \right)}{\text{SKG}(\hat{y}_{1t}(s))}$$

Deo varijanse greske predvidjanja,  $\text{SKG}(\hat{y}_{1t}(s))$ , koji se javlja zbog šoka  $w_2$  :

$$\frac{\sigma_{w2}^2 \left( \theta_{12}^{(0)2} + \dots + \theta_{12}^{(s-1)2} \right)}{\text{SKG}(\hat{y}_{1t}(s))}.$$

## Primer primene dekompozicije varijanse greške predvidjanja

Arsić, Mladenović, Nojković, Petrović (2005),  
*Makroekonometrijsko modeliranje privrede Srbije:  
teorijske osnove i rezultati*, CESMECON

Analiza determinanti privredne aktivnosti i uvoza Srbije u  
prvim godinama tranzicije:

- VAR: BDP, uvoz (M) i realne bruto plate (W)
- Da li je BDP u većoj meri odredjen faktorima na strani tražnje ili faktorima na strani ponude?
- Rezultat testa uzročnosti: egzogeni rast plata vuče uvoz, a zatim uvoz pokreće proizvodnju.
- Prvi put kod nas primenjeni metodi dezagregiranja BDP na mesečni nivo.

### Primer primene dekompozicije varijanse greške predvidjanja II

u %	Jednačina BDP			Jednačina uvoza			Jednačina plata		
Br. meseci	BDP	M	W	BDP	M	W	BDP	M	W
<b>10</b>	61	10	29	14	44	42	4	0	96
<b>20</b>	55	9	36	23	37	51	5	0	95

Napomene:

Redosled: plate-uvoz-BDP; Redovi se sabiraju do 100%.

Zaključci:

1. U varijacijama plata zanemarljiv je udeo varijacija uvoza i BDP.
2. U varijacijama BDP znatno je veći udeo plata nego uvoza.
3. Varijacije uvoza prvenstveno su određene varijacijama plata, a tek onda varijacijama BDP.

#### Tema:

1. Uslov stabilnosti VAR modela
2. Ocene parametara modela
3. Određivanje reda VAR modela
4. Uzročnost
5. Funkcija impulsnog odziva
6. Dekompozicija varijanse greške predviđanja
7. Strukturni VAR model

### Identifikacija parametara u VAR(1) modelu

- Krenuli smo od strukturnog VAR modela, ali smo prešli na redukovana formu (klasični VAR model) da bismo ocenili parametre modela.
- Da li je moguće rekonstruisati parametre strukturnog VAR modela na osnovu ocenjenih parametara klasičnog VAR modela. Nije!
- U dvodimenzionom strukturnom VAR (1) modelu ima 10 parametara za ocenjivanje, dok ih je 9 u standardnom VAR(1) modelu.
- To znači da je VAR model nedovoljno identifikovan. Međutim, ako se nametne ograničenje da je jedan parametar strukturnog VAR modela jednak 0, tada je broj parametara 9 i sistem postaje tačno identifikovan.
- Nameću se ograničenja na strukturne parametre.

### Identifikacija parametara u VAR(1) modelu II

- Sims (1980): Struktura treba da je rekurzivna, tako da je  $b_{21}=0$ . To znači sledeće:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{xt} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{xt} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{10} \\ \phi_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}$$

### Identifikacija parametara u VAR(1) modelu III

- Parametri strukturnog VAR modela se identifikuju prema sledećih 9 jednačina:

$$\phi_{10} = b_{10} - b_{12}b_{20} \quad \phi_{20} = b_{20} \quad \text{var}(e_1) = \sigma_y^2 + b_{12}^2\sigma_x^2$$

$$\phi_{11} = \gamma_{11} - b_{12}\gamma_{21} \quad \phi_{21} = \gamma_{21} \quad \text{var}(e_2) = \sigma_x^2$$

$$\phi_{12} = \gamma_{12} - b_{12}\gamma_{22} \quad \phi_{22} = \gamma_{22} \quad \text{cov}(e_1, e_2) = -b_{12}\sigma_x^2$$

### Identifikacija parametara u VAR(1) modelu IV

- Sada se svojstva strukturalnih odnosa između veličina analiziraju na osnovu reziduala klasičnog VAR modela:

$$\left. \begin{array}{l} e_{1t} = \varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{xt} \\ e_{2t} = \varepsilon_{xt} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{xt} \end{bmatrix}$$

- Ograničenjem  $b_{21}=0$  prepostavlja se da

- $y$  ne ostvaruje tekući uticaj na  $x$ .

- Oba strukturalna šoka,  $\varepsilon_{yt}$  i  $\varepsilon_{xt}$  ostvaruju tekući uticaj na  $y$ , dok samo šok  $\varepsilon_{xt}$  utiče na  $x$  sa tekućim dejstvom.

- Ograničenje ovog tipa zasniva se na trougaonoj dekompoziciji kovarijacione matrice (Holeskijeva dekompozicija).

### Identifikacija parametara u VAR(1) modelu V

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{xt} \end{bmatrix}, \Omega = E \left( \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t} & e_{2t} \end{bmatrix} \right) \\
 \Omega &= \begin{bmatrix} \text{var}(e_{1t}) & \text{cov}(e_{1t}, e_{2t}) \\ \text{cov}(e_{1t}, e_{2t}) & \text{var}(e_{2t}) \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_V \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_{12} & 1 \end{bmatrix}}_V = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 + b_{12}^2 \sigma_x^2 & -b_{12} \sigma_x^2 \\ -b_{12} \sigma_x^2 & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow b_{12} = -\frac{\text{cov}(e_{1t}, e_{2t})}{\text{var}(e_{2t})}.
 \end{aligned}$$

Koraci u ocenjivanju :

1. Ocenjuje se standardni VAR model primenom metoda ONK.
2. Na osnovu ocene kovarijacione matrice reziduala ocenjuje se nepoznati strukturalni parametar.
3. Na osnovu ocena parametara VAR modela i ocene dekompozicije kovarijacione matrice rekonstruise se odgovarajuća MA forma.

### Identifikacija parametara u VAR(1) modelu VI

1. Ukoliko postoji greška specifikacije u smislu da je iz modela izostavljena relevantna promenljiva, onda se njen uticaj manifestuje kroz reziduale, koji tada daju iskrivljenu sliku strukturalnih odnosa.
2. Međusobna interakcija svih promenljivih u sistemu otvara problem izbora njihovog redosleda. Potrebno je odabratи redosled koji najpreciznije odslikava prirodu ekonomskih odnosa. U tome mogu biti od koristi i rezultati testa uzročnosti.
3. Stabilnost rezultata lako se može proveriti variranjem redosleda jednačina VAR modela.

### Varijante struktturnog VAR modela

1. Pored Holeskijeve moguće su i druge dekompozicije kovarijacione matrice reziduala.
2. Holeskijevom dekompozicijom sistem je tačno identifikovan.  
Broj ograničenja je tačno  $n(n-1)/2$ .
3. Postoje i druge dekompozicije kojima sistem postaje prekomerno identifikovan (Bernanke-ova).  
Broj ograničenja je veći od  $n(n-1)/2$ .  
Opravdanost dodatnih ograničenja proverava se primenom testa količnika verodostojnosti.
4. Primer: Petrović and Vujošević-Mladenović (2000),  
Monetary accommodation in transition economies:  
Econometric evidence from Yugoslavia's high inflation in the 1980s, *Journal of Development Economics*, 62.

### Varijante struktturnog VAR modela: primer

- Period: januar 1980- jul 1991.
- VAR: Cene na malo, devizni kurs, plate i primarni novac
- Ocenjen struktturni VAR:

$rcene, rkurs, rplate, rnovac$  - reziduali iz korespondirajućih jednacina

$$rcene = 0.11rkurs$$

( 2.75 )

$$rplate = 1.23rcene$$

( 7.23 )

$$rnovac = 0.15rplate$$

( 1.67 )

t - odnosi su dati u zagradi

Ogranicenja su prihvatljiva (3 vise od tacne identifikacije):

$$\chi^2(3) = 2.60 ( p - vrednost = 0.46 ).$$

### Varijante stukturnog VAR modela: primer II

- Dekompozicija varijanse greške predviđanja ostvarena na osnovu datog stukturnog VAR modela za 20 meseci

%, kolone se sabiraju do 100	Reakcija u:			
	Impuls u:	jednačini cena	jednačini plata	jednačini kursa
jednačini cena	25	28	14	30
jednačini Plata	30	31	21	33
jednačini Kursa	44	40	64	36
jednačini Novca	1	1	1	1

### Primer za praktičan rad:

- Vremenske serije privrede Srbije:
  - Inflacija (prva differenca log cena na malo)
  - Deprecijacija (prva differenca log deviznog kura, dinar/evro, korigovano za inflaciju u evro zoni)
  - Stopa rasta cene nafte na svetskom tržištu (dolar po barelu)
- Mesečni podaci
- Period: januar 2005 – maj 2009. godine